Colles de Maths - semaine 15 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in]0, r_0[, \quad f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercice 2 On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que le rang de $\mathrm{d}f_M$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont égaux est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction deux fois différentiable telle que $d^2 f = 0$. Montrer que f est la restriction à U d'une fonction affine (c'est-à-dire d'une fonction linéaire translatée d'un vecteur).

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Justifier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ et calculer la différentielle de l'application

$$\mathrm{Inv} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array} \right. .$$

Bonus : Comment peut-on généraliser le résultat à E un espace vectoriel normé de dimension quelconque ?

Exercice 5 Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. On dit que $f : E \to F$ est strictement différentiable en $x \in E$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\frac{\|f(x+h) - f(x+k) - L(h-k)\|}{\|h-k\|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

1. Montrer que si f est strictement différentiable, elle est différentiable.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est strictement différentiable en tout point.
3. La réciproque du premier point est-elle vraie ?

Exercice 6 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = f, \quad x > 0, \, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ tel que $f = \nabla g$;

(ii) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\partial_i f_j = \partial_j f_i$.